

## 1.2 Материалы для управляемой самостоятельной работы студентов учебно-методического комплекса по дисциплине «Оптимизация линейных дискретных динамических моделей»

### 1 Построение математических моделей

#### 1.1 Задача о максимуме произведения

Требуется найти  $N$  неотрицательных чисел, сумма которых не превосходит заданного числа  $a > 0$  и которые имеют при этом максимальное произведение.

Построим математическую модель этой задачи следующим образом. Представим, что некто хочет выбрать эти  $N$  неотрицательных чисел, сумма которых не превосходит  $a$ , и затем, перемножив их, посмотреть, насколько большим получилось произведение. Для этого в первую секунду он выбирает одно неотрицательное число (не превосходящее  $a$ ), во вторую — еще одно число (так, чтобы сумма обоих выбранных чисел не превосходила  $a$ ), в третью — третье число, ... ; наконец,  $N$ -е число он выбирает в  $N$ -ю секунду. Число, которое выбирает этот некто в момент времени  $t$ , обозначим через  $u(t)$ . Таким образом, выбор  $N$  чисел, сумма которых не превосходит числа  $a$ , мы заменили выбором некоторой функции  $u(t)$ , определенной для дискретного множества значений  $t = 1, 2, \dots, N$ .

Естественно, что выбирая одно за другим числа  $u(1), u(2), \dots, u(N)$ , нужно (желательно) каждый раз подсчитывать сумму и произведение уже выбранных чисел. Сумма нужна для того, чтобы знать, в каких пределах можно выбирать следующее число (т.е. сколько еще осталось до  $a$ ). Произведение уже выбранных чисел удобно иметь для того, чтобы дойдя до конца процесса, иметь готовое произведение всех чисел.

Обозначим через  $x_1(t)$  сумму, а через  $x_2(t)$  — произведение всех чисел, уже выбранных за  $t$  секунд:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= u(1) + u(2) + \dots + u(t); \\x_2(t) &= u(1) \cdot u(2) \cdot \dots \cdot u(t).\end{aligned}$$

Ясно, что выбрав в момент  $t$  число  $u(t)$ , чтобы узнать сумму всех уже имеющихся чисел, нужно просто прибавить только что выбранное число  $u(t)$  к сумме  $x_1(t-1)$  всех ранее имевшихся чисел:

$$x_1(t) = x_1(t-1) + u(t). \quad (1.1)$$

Точно так же для нахождения  $x_2(t)$  надо произведение всех ранее имев-

шихся чисел  $x_2(t-1)$  умножить на только что выбранное число  $u(t)$ :

$$x_2(t) = x_2(t-1) \cdot u(t). \quad (1.2)$$

Формулы (1.1) и (1.2) имеют место для  $t = 2, 3, \dots, N$ . При  $t = 1$  вместо них имеем  $x_1(1) = u(1)$ ,  $x_2(1) = u(1)$ . Эти соотношения можно включить в систему формул (1.1), (1.2), условившись считать, что

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1. \quad (1.3)$$

Тогда (1.1), (1.2) будут иметь место для всех  $t = 1, 2, \dots, N$ .

Наконец, определим, в каких пределах можно выбирать в момент  $t$  число  $u(t)$ . Так как в этот момент сумма всех выбранных чисел не должна превосходить  $a$ , т.е.

$$x_1(t-1) + u(t) \leq a,$$

то

$$u(t) \leq a - x_1(t-1).$$

Кроме того, по условию, число  $u(t)$  должно быть неотрицательным. Таким образом, число  $u(t)$  должно принадлежать отрезку

$$0 \leq u(t) \leq a - x_1(t-1), \quad (1.4)$$

т.е.

$$u(t) \in U(x_1(t-1)), \quad (1.5)$$

где через  $U(x_1(t-1))$  обозначен отрезок (1.4).

Остается заметить, что произведение всех выбранных чисел  $u(1), u(2), \dots, u(N)$  равно  $x_2(N)$ .

Таким образом, согласно приведенным рассуждениям, необходимо одно за другим выбрать числа  $u(1), u(2), \dots, u(N)$ , причем при каждом  $t = 1, 2, \dots, N$  вместе с  $u(t)$  определяются также числа  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  (см. (1.1), (1.2), (1.3)) и накладывается ограничение (1.5), где  $U(x_1(t-1))$  есть отрезок, определяемый соотношениями (1.4); в конечный момент  $t = N$  нас интересует значение  $x_2(N)$  (его нужно максимизировать).

Условимся считать, что соотношения (1.1), (1.2) задают *дискретный управляемый объект*, где  $x_1, x_2$  — *фазовые координаты*, а  $u$  — *управляющее воздействие*, которое должно изменяться в пределах области управления, заданной соотношениями (1.4). Произвольную последовательность чисел  $u(1), u(2), \dots, u(N)$  будем называть *управлением*, а последовательности

$$\begin{aligned} &x_1(0), x_1(1), \dots, x_1(N); \\ &x_2(0), x_2(1), \dots, x_2(N), \end{aligned}$$

определяемые из соотношений (1.1), (1.2) с начальными условиями (1.3), будем называть *траекторией*, соответствующей этому управлению. Если в каждый момент  $t = 1, 2, \dots, N$  выполняется соотношение (1.5), то управление будем называть *допустимым*.

Теперь задачу можно переформулировать в виде *задачи оптимального управления* — для дискретного управляемого объекта (1.1), (1.2) найти такое допустимое управление и соответствующую ему траекторию с начальными условиями (1.3), чтобы величина (критерий качества управления)  $x_2(N)$  принимала максимальное значение:

$$\begin{aligned} J(u) = x_2(N) &\rightarrow \max, \\ x_1(t) &= x_1(t-1) + u(t), \quad x_2(t) = x_2(t-1) \cdot u(t), \quad t = 1, 2, \dots, N; \\ x_1(0) &= 0, \quad x_2(0) = 1; \\ u(t) &\in U(x_1(t-1)), \quad t = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.6)$$

## 1.2 Второй способ сведения задачи о максимуме произведения к задаче оптимального управления

Будем считать, что в задаче из п. 1.1 все сомножители положительны (если хотя бы один из сомножителей равен нулю, то и произведение равно нулю, что, конечно, не дает максимума произведения). Далее, чтобы упростить операцию умножения, будем вычислять не само произведение, а его логарифм, т.е. сумму логарифмов сомножителей.

Тогда управление  $u(t)$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$ , и первая фазовая координата  $x_1(t)$ ,  $t = 0, 1, \dots, N$ , сохраняют прежний смысл; сохраняется соотношение (1.1) и первое из равенств (1.3). Вторая фазовая координата и связанные с ней соотношения становятся ненужными — вместо этого последовательно выбирая числа  $u(1), u(2), \dots, u(N)$ , нужно вычислить сумму их логарифмов:

$$J(u) = \ln u(1) + \ln u(2) + \dots + \ln u(N). \quad (1.7)$$

Эту сумму нужно максимизировать.

Исключим ограничения (1.4). Обозначим через  $M$  отрезок  $M = [0; a]$  и потребуем, чтобы

$$x_1(N) \in M. \quad (1.8)$$

Так как (в силу (1.1))  $x_1(t) = u(1) + u(2) + \dots + u(t)$ , то включение (1.8) означает, что сумма всех выбранных чисел  $u(1), u(2), \dots, u(N)$  не превосходит  $a$ , что и требуется в задаче. Осталось лишь позаботиться, чтобы все эти числа были положительными, т.е. ограничения (1.4) заменяются более простыми:

$$u(t) > 0, \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (1.9)$$

Таким образом, область управления  $U(x_1(t-1))$  (см. (1.5)) теперь переходит в луч  $U = (0; \infty)$ , т.е. не зависит от  $x_1(t-1)$ . Поэтому (1.9) имеет более простой вид, чем (1.4):

$$u(t) \in U. \quad (1.10)$$

Итак, дискретный управляемый объект задается теперь соотношением (1.1), где  $x_1$  — фазовая координата (единственная), а  $u$  — управляющее воздействие, которое должно изменяться в пределах области управления, заданной соотношением (1.9), а задача о максимуме произведения принимает следующую формулировку — для дискретного управляемого объекта вида (1.1) найти такое управление  $u(1), u(2), \dots, u(N)$ , удовлетворяющее условию (1.9), чтобы для соответствующей траектории  $x(0), x(1), \dots, x(N)$  с начальным условием  $x(0) = 0$  выполнялось соотношение (1.8) и сумма (1.7) принимала при этом максимальное значение:

$$\begin{aligned} J(u) &= \ln u(1) + \ln u(2) + \dots + \ln u(N) \rightarrow \max, \\ x(t) &= x(t-1) + u(t), \quad t = 1, 2, \dots, N; \\ x(0) &= 0; \\ x(N) &\in M = [0; a]; \\ u(t) &\in U = (0; \infty), \quad t = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.11)$$

### 1.3 Динамическая производственная задача

Пусть для предприятия, имеющего возможность выпускать продукцию  $P_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , использующего при этом ресурсы  $R_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , требуется составить оптимальный план производства на несколько периодов.

При этом известно:

$s$  — число периодов планирования;

$d_i^k$  — предельная емкость склада для ресурса  $R_i$  на  $k$ -ом этапе,  $i = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{1, s+1}$ ;

$p_i^k$  — стоимость хранения на складе единицы ресурса  $R_i$  на  $k$ -ом этапе,  $i = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{1, s}$ ;

$q_i^k$  — количество перемещаемого ресурса  $R_i$  на  $k$ -ом этапе,  $i = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{1, s}$  (если  $q_i^k > 0$ , то ресурс завозится на склад; если  $q_i^k < 0$  — он вывозится);

$z_i^0$  — начальный запас ресурса  $R_i$  на складе,  $i = \overline{1, m}$ ;

$a_{ij}^k$  — количество ресурса  $R_i$ , необходимое для производства единицы продукции  $P_j$  на  $k$ -ом этапе,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, s}$ ;

$c_j^k$  — прибыль от реализации единицы готовой продукции  $P_j$  на  $k$ -ом этапе,

$j = \overline{1, n}, k = \overline{1, s};$   
 $f_j^k$  — предельный объем производства продукции  $P_j$  на  $k$ -ом этапе,  $j = \overline{1, n},$   
 $k = \overline{1, s}.$

Введем переменные:

$z_i^k$  — запас ресурса  $R_i$  на  $k$ -ом этапе, имеющийся на складе,  $i = \overline{1, m},$   
 $k = \overline{1, s+1};$   
 $x_j^k$  — планируемый объем производства продукции  $P_j$  на  $k$ -ом этапе,  $j = \overline{1, n},$   
 $k = \overline{1, s}.$

Очевидно, что должно выполняться условие баланса ресурсов на складе — количество ресурса на  $(k+1)$ -ом этапе равно его количеству на предыдущем  $k$ -ом этапе с учетом расходов на производство и обмена с внешними источниками и потребителями, т.е.

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \sum_{j=1}^n a_{ij}^k x_j^k + q_i^k, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, s}. \quad (1.12)$$

При этом начальные запасы ресурсов известны:

$$z_i^1 = z_i^0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1.13)$$

В силу ограниченности производственных мощностей и емкости складов должны выполняться ограничения

$$0 \leq x_j^k \leq f_j^k, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, s}; \quad (1.14)$$

$$0 \leq z_i^k \leq d_i^k, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{2, s+1}. \quad (1.15)$$

Общая прибыль предприятия получается из доходов от реализации произведенной продукции за вычетом расходов на хранение ресурсов. Ее нужно максимизировать:

$$\sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^n c_j^k x_j^k - \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^m p_i^k z_i^k \rightarrow \max. \quad (1.16)$$

Задача (1.12)–(1.16) относится к задачам ЛП. Однако ее ограничения имеют специфическую динамическую структуру. Поэтому при большом числе этапов  $s$  задачу (1.12)–(1.16) целесообразно трактовать как задачу оптимального управления.

Переменную  $t$ , принимающую значения  $1, 2, \dots, s$ , назовем дискретным временем. Совокупность  $z(t) = (z_i^t, i = \overline{1, m})$  назовем состоянием объекта управления (склада) в момент  $t$ . Величины, выбором которых можно изменять состояние объекта, называют управлением. В рассматриваемой задаче в качестве управления в момент  $t$  выберем совокупность  $u(t) = (x_j^t, j = \overline{1, n}).$

Введем векторно-матричные обозначения  $A(t) = E$ ,  $B(t) = (-a_{ij}^t, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ ;  $q(t) = (q_i^t, i = \overline{1, m})$ ,  $p(t) = (p_i^t, i = \overline{1, m})$ ,  $d(t) = (d_i^t, i = \overline{1, m})$ ,  $z^0 = (z_i^0, i = \overline{1, m})$ ;  $f(t) = (f_j^t, j = \overline{1, n})$ ,  $c(t) = (c_j^t, j = \overline{1, n})$ . Тогда задачу (1.12)–(1.16) можно записать в следующем виде.

$$J(u) = \sum_{t=1}^s (-p'(t)z(t) + c'(t)u(t)) \rightarrow \max, \quad (1.17)$$

$$z(t+1) = A(t)z(t) + B(t)u(t) + q(t), \quad t \in T = \{1, 2, \dots, s\}, \quad (1.18)$$

$$z(1) = z^0, \quad (1.19)$$

$$0 \leq z(t) \leq d(t), \quad t \in T \cup \{s+1\}; \quad 0 \leq u(t) \leq f(t), \quad t \in T. \quad (1.20)$$

Задача (1.17)–(1.20) — это дискретная линейная задача оптимального управления. На языке теории оптимального управления она звучит следующим образом: найти оптимальное управление  $u(t)$ ,  $t \in T$ , и оптимальную траекторию  $z(t)$ ,  $t \in T \cup \{s+1\}$ , дискретной системы (1.18), (1.19), которые удовлетворяют ограничениям (1.20) и доставляют критерию качества (1.17) максимальное значение.